2. Аминова А. В. *Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий* // УМН –1995. –Т. 50. –№ 1. –С. 69–142.

3. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. *О проективных движениях пятимерных пространств специального вида* // Изв. вузов. Матем. –2017. –Т.5 –С. 1–6.

ON INTEGRATION OF THE EISENHART EQUATION AND H-SPACES OF THE TYPE {221}

A.V. Aminova, D.R. Khakimov

In this paper, using the method of skew-normal frame (Aminova), the Eisenhart equations are integrated and five-dimensional h-spaces of the type {221} *are determined.*

Keywords: Eisenhart equation, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, h-space of the type {221}.

УДК 514.744.2

ОБ АЛЬТЕРНАТИВНО-ЭЛАСТИЧНЫХ АЛГЕБРАХ ПРИ N MOD 8 =0

К.В. Андреев[1]

1 *krit_ufa@mail.ru*; Уфа

В статье обсуждается связь между алгебрами Клиффорда, спинорной алгеброй и алгебрами гиперкомплексных чисел, основанная на периодичности Ботта и принципе тройственности Картана и влияние этих аспектов на физическую составляющую пазла.

Ключевые слова: спиноры, алгебры Клиффорда, гиперкомплексные числа.

Аксиоматика действительных чисел $\mathbb{R}$ включает в себя набор аксиом, касающихся операции умножения таких чисел: 1). $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $\exists!\ a\cdot b =: c \in \mathbb{R}$, 2). $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$, $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$, 3). $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a\cdot b = b\cdot a$, 4). $\forall a \in \mathbb{R}, \exists\, 1 \in \mathbb{R}, a\cdot 1 = a$, 5). $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\exists\ b \in \mathbb{R}$, $a\cdot b = 1$, 6). $\forall a,b,c \in \mathbb{R}\ a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$. При переходе к комплексным числам теряются аксиомы порядка: поле комплексных чисел является неупорядоченным. При переходе к кватернионам потеряется коммутативность умножения. А уже у октонионов мы наблюдаем смену ассоциативности на альтернативность: $\forall a,b \in \mathbb{O}$, $a\cdot(a\cdot b) = (a\cdot a)\cdot b$, $(a\cdot b)\cdot b = a\cdot(b\cdot b)$. При переходе к седенионам альтернативность меняется на слабую альтернативность: $\forall a,b \in \mathbb{S}$, $a\cdot(a\cdot b)-(a\cdot a)\cdot b = (b\cdot a)\cdot a - b\cdot(a\cdot a)$ [1, стр. 1(eng)]. До n=16 построение таких алгебр можно было осуществить, используя процедуру удвоения Кэли-Диксона. Если следовать ей и в дальнейшем, то на следующем шаге следует ожидать размерность равную 32. Но вот вопрос, а есть ли слабо альтернативные алгебры между размерностями 16 и 32, и сохраняется ли тождество слабой альтернативности в дальнейшем? Если такие алгебры существуют, то разумно предположить, что их размерность может быть равна 24. То есть, такие алгебры могли бы существовать для всех размерностей, кратных 8. Подобные рассуждения навевают мысль о возможном проявлении периодичности Ботта, которую сформулировал Картан применительно к алгебрам Клиффорда. Таким образом, если указать на связь между алгебрами Клиффорда, спинорной алгеброй и слабо альтернативными алгебрами, то можно научиться строить такие алгебры для n mod 8=0. При этом инициальным шагом индукции является шаг для n=8. По сути, хотелось бы выяснить, как геометрические факты, такие как периодичность Ботта и принцип тройственности Картана, связаны с алгебраической частью, и даст ли это возможность перенести метрику Минковского на спинорное (ну уж если быть точным, на параспинорное) пространство, что связано, соответственно, с переносом физических законов сохранения.

Генераторами комплексных алгебр Клиффорда являются элементы $\gamma_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & (\eta^T)_{\Lambda CD} \\ \eta_\Lambda{}^{AB} & 0 \end{pmatrix}$ $(\Lambda, \ldots = \overline{1,n},\ A,B,C,D,\ldots = \overline{1,2^{n/2-1}})$. Переопределив $\sigma_{\Lambda CD} := (\eta^T)_{\Lambda CD}$, получим, что для n=4 γ_Λ будут комплексными аналогами матриц Дирака, а σ_Λ - комплексными аналогами матриц Паули. Операторы η_Λ должны удовлетворять уравнению

$$\eta_\Lambda \sigma_\Psi + \eta_\Psi \sigma_\Lambda = g_{\Lambda\Psi} E, \tag{1}$$

называемому клиффордовым уравнением. Чтобы установить связь с гиперкомплексными числами, необходимо решить данное уравнение. Можно указать индуктивное построение частных решений данного уравнения в виде $\eta_\Lambda{}^{AB} := \sum\limits_{I=1}^{n} (\eta_I)_\Lambda (\varepsilon_I)^{AB}$, где некоторое количество $(\varepsilon_I)^{CD}$ кососимметрично, оставшаяся часть - симметрична [2, стр. 39(eng)]. Зная хоть одно частное решение, можно найти общее решение уравнения Клиффорда. Индуктивный же переход к следующей четной размерности осуществляется по одной из двух схем согласно алгоритму 9.1 [2, стр. 50(eng)] $(\alpha, \ldots = \overline{1, n-2},\ a,b,c,d,\ldots = \overline{1,2^{n/2-2}})$:

$$a).\quad \eta_\Lambda{}^{AB} = \begin{pmatrix} \eta_\alpha{}^{ab} & \frac{1}{2}(i\eta_{n-1} + \eta_n)\delta^a{}_d \\ \frac{1}{2}(-i\eta_{n-1} + \eta_n)\delta_c{}^b & -(\eta^T)_{\alpha cd} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{\Lambda AB} = \begin{pmatrix} (\eta^T)_{\alpha ab} & \frac{1}{2}(i\eta_{n-1} + \eta_n)\delta_a{}^d \\ \frac{1}{2}(-i\eta_{n-1} + \eta_n)\delta^c{}_b & -\eta_\alpha{}^{cd} \end{pmatrix},$$

$$b).\quad \eta_\Lambda{}^{AB} = \begin{pmatrix} \eta_\alpha{}^{ab} & \frac{1}{2}(i\eta_{n-1} + \eta_n)\delta^a{}_d \\ \frac{1}{2}(i\eta_{n-1} - \eta_n)\delta_c{}^b & -(\eta^T)_{\alpha cd} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{\Lambda AB} = \begin{pmatrix} (\eta^T)_{\alpha ab} & \frac{1}{2}(i\eta_{n-1} + \eta_n)\delta_a{}^d \\ \frac{1}{2}(i\eta_{n-1} - \eta_n)\delta^c{}_b & -\eta_\alpha{}^{cd} \end{pmatrix}.$$

Переходя к операторам $\eta_i{}^{AB}, \bar{\eta}_i{}^{A'B'}$ с помощью оператора вложения $H_i{}^\Lambda$ $(i, \ldots = \overline{1,n})$, для n mod 8 = 0 можно построить некоторые структурные константы [1, ур. (5)]

$$\eta_{ij}{}^k := \sqrt{2}\eta_i{}^{AB}\eta_{jCA}\eta^k{}_{DB}\theta^{CD} \tag{2}$$

для некоторого симметричного $\theta^{CD} = \theta^{DC}$. Особенность индуктивного построения такова, что для n mod 8 = 0 существует единственный среди $\varepsilon_I{}^{AB}$ симметричный тензор $\varepsilon^{AB} = \varepsilon^{BA}$, которому, в свою очередь, соответствует единица группы $e := \frac{1}{\sqrt{2}}\eta^k$. Более того, уравнение Клиффорда (1) обеспечивает выполнение аксиомы слабой альтернативности. И, наконец, все альтернативно-эластичные алгебры, т.е. алгебры, удовлетворяющие аксиоме слабой альтернативности, допускают разложение (2) для своих структурных констант. Это и есть связующее звено между алгебрами Клиффорда и гиперкомплексными алгебрами. Периодичность Ботта в этом случае гарантирует индуктивное построение таких алгебр для n mod 8=0 с сохранением всех необходимых аксиом, благодаря тождеству [1, ур. (47)]

$$\eta_{[i}{}^{AB}\eta_{j]AC}\eta^{[m|XC|}\eta^{l]}{}_{XY}\eta_r{}^{DY}\eta^k{}_{DB} = \tfrac{N}{2}(\delta_r{}^{[l}\delta_{[j}{}^{m]}\delta_{i]}{}^k - g^{k[l}\delta_{[j}{}^{m]}g_{i]r}) + \tfrac{N}{4}\delta_r{}^k\delta_i{}^{[l}\delta_j{}^{m]},$$

следующему из уравнения Клиффорда (1).

Пример. Для n=8 ортогональные преобразования, сохраняющие единицу группы, описываются как $S_i{}^j\eta_j{}^{AB} = \eta_i{}^{CD}S_C{}^AS_D{}^B,\ S_C{}^AS_D{}^B\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{CD}$ [2, стр. 29(eng)], представляя группу автоморфизмов алгебры октав [5] для сигнатуры "+ + + + + + + + " базового пространства. При этом управляющий тензор Θ^{CD} в специальном базисе будет иметь одну существенную координату $\Theta^{11} = 2$ для канонической таблицы умножения октав [5, пр. 1]. Переходя к инфинитезимальным преобразованиям, можно получить $T_C{}^A = \frac{1}{2}T^{ij}\eta_j{}^{AB}\eta_{iCB}$ с метрическим симметричным тензором ε^{AB}. Условия сохранения единицы группы приведут к системе $\eta_i{}^{AB}T_{AB} = 0,\ T_A{}^C\theta_{CB} + T_B{}^C\theta_{AC} = 0$, описывающей алгебру Ли g_2 и, с точностью до ортогональных преобразований, совпадающей с системой [4, ур. (13), стр. 313].

Другим интересным фактом является проявление принципа тройственности в алгебраической форме $y^\Lambda = \eta^\Lambda{}_{AB}X^AY^B$, где $P^\Lambda{}_B := \eta^\Lambda{}_{AB}X^A$. Это дает возможность рассмотреть вложение $H^i{}_\Lambda$, переходя к сигнатуре "+ + + + - - - - " для базового пространства. Базовое пространство можно рассматривать как действительную реализацию комплексного 4-х мерного пространства, тогда операторы $P^i{}_B := H^i{}_\Lambda P^\Lambda{}_B$ тоже будут иметь комплексную реализацию. Но таких существенных реализаций будет ровно две $(P_1,\ P_4)$ и $(P_1^*,\ P_4^*)$. Рассматривая вложение действительного пространства с сигнатурой "- - - + " в полученное комплексное, можно отобразить вектор базового уже 4-х мерного пространства Минковского $X^i := (Y, X, Z, T)$ на пару спиноров 2-мерного спинорного пространства $X^a := ((X_1)^A, (X_1^*)_B) = (\frac{1-i}{2}(T + Z), \frac{1-i}{2}(X - iY), \frac{1+i}{2}(T - Z), \frac{1+i}{2}(-X - iY))$ $(a, b, \ldots = \overline{1,4},\ A, B, \ldots = \overline{1,2},\ i, j, \ldots = \overline{1,4})$, отождествленных посредством оператора $P_i{}^a = ((P_1^*)_i{}^A, (P_1)_{iB}))$. Тогда в специальном базисе метрика пространства Минковского на параспинорное пространство переносится как $\varepsilon_{ab} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$. Чтобы получить копараспиноры $X_a := ((X_4^*)_A, (X_4)^B) = (\frac{1+i}{2}(T + Z), \frac{1+i}{2}(-X + iY), \frac{1-i}{2}(T - Z), \frac{1-i}{2}(X + iY))$ необходимо воспользоваться оператором $P^i{}_a := ((P_4)^i{}_A, (P_4^*)_i{}^B)$. С геометрической точки зрения, некоторая плоскость, содержащая вектор x^i, пересекает световой конус с вершиной в начале вектора x^i по двум изотропным направлениям, совпадающим с векторами $(P_1)^i{}_A(X_1)^A$ и $(P_1^*)^{iB}(X_1^*)_B$ так, что $x^i = (P_1)^i{}_A(X_1)^A + (P_1^*)^{iB}(X_1^*)_B$. Однако, если на базовом пространстве будет действовать тождественная инволюция $x^i = \bar{x}^i$ $(i, \ldots = \overline{1,4})$, то на параспинорном пространстве это уже не так, и инволюция в том же специальном базисе примет вид $S_a{}^{b'} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, позволяя перейти к сопряженным элементам по формуле $\bar{X}^{b'} = S_a{}^{b'} X^a$. Для спинорного пространства определена инволюция $S_A{}^{B'}$, которую можно ввести в определение связующих операторов, переходя к символам Инфельда-ван дер Вардена $g_i{}^{AB'} := H_i{}^{\Lambda}\eta_{\Lambda}{}^{AB} S_A{}^{B'}$ $(A, B, \ldots = \overline{1,2})$. Для пространственно-временного многообразия в касательном расслоении можно ввести риманову связность без кручения. Ковариантное постоянство связующих операторов (символов Инфельда-ван дер Вардена) позволит перенести связность в спинорное расслоение. Тогда космановская производная Ли вдоль вектора Киллинга x определится уравнением $\mathscr{L}_x g_i{}^{AB'} = 0$. С другой стороны, рассмотреть проекцию производной Ли в спинорные слои можно с помощью проекторов $P^i{}_A := (P_1)^i{}_A = g^i{}_{AA'}(\bar{T})^{A'}$ и $(P^*)_{iB} := (P_1^*)^{iB} = g_i{}^{BB'}(\bar{T}^*)_{B'}$, отождествляя вектор y^i касательного пространства с парой спиноров $(Y^A, (Y^*)_B)$. Пара же $(\bar{T}^{A'}, (\bar{T}^*)_{B'})$ служит образом вектора X из оператора P для 8-мерного пространства. Для переноса производной Ли необходимо постулировать $L_x P^i{}_A = 0$ и $L_x(P^*)_i{}^B = 0$. Очевидно, что действия обеих производных на изотропных векторах $y^i := g^i{}_{AB'}\kappa^A\bar{\kappa}^{B'} = P^i{}_A Y^A + (P^*)_{iB}(Y^*)_B$ (ковекторах $y_i := g_i{}^{AB'}\kappa_A\bar{\kappa}_{B'}$) будут идентичны $L_x Y^A = (\bar{T}^*)_{C'}\$_x(\bar{\kappa}^{C'}\kappa^A)$, $L_x(Y^*)_A = \bar{T}^{C'}\$_x(\bar{\kappa}_{C'}\kappa_A)$ при условии ковариантного постоянства $x^i\nabla_i(\bar{T}^*)_{A'} = 0$, $x^i\nabla_i\bar{T}^{A'} = 0$. В этом случае $Y^A = (\bar{\kappa}^{C'}(\bar{T}^*)_{C'})\kappa^A$, $(Y^*)_A = (\bar{\kappa}_{C'}\bar{T}^{C'})\kappa_A$.

Таким образом, любой спинор $\bar{F}^{A'}$ может быть разложен по базису $\{(\bar{T}^*)^{A'}, \bar{T}^{A'}\}$, а коспинор $(\bar{F}^*)_{A'}$ - по базису $\{(\bar{T}^*)_{A'}, \bar{T}_{A'}\}$, что позволяет сконструировать пару $F_i{}^A := g_i{}^{AB'}(\bar{F}^*)_{B'}$ и $(F^*)^i{}_A := g^i{}_{AB'}(\bar{F})^{B'}$. Тогда $\bar{F}_{A'}$ и $(\bar{F}^*)_{B'}$ можно рассматривать в качестве главных спиноров [3, (3.5.18) proposition(eng)] некоторого симметричного спинора $\tilde{\phi}_{A'B'}$. Определим $GEM_F^{\mathbb{C}}$*-состояние* как

$$(\mathfrak{F}^{\mathbb{C}})_{ij} := F_i{}^A (F^*)_{jA} = \underbrace{g_{ij}(\frac{1}{2}\bar{F}^{A'}(\bar{F}^*)_{A'})}_{(\mathfrak{F}_F^{\mathbb{C}})_{(ij)}} + \underbrace{(F^{\mathbb{C}})_{ij}}_{(\mathfrak{F}^{\mathbb{C}})_{[ij]}}$$

где g_{ij} - метрический тензор, а $(F^{\mathbb{C}})_{ij}$ есть комплексный тензор Максвелла с главными спинорами $\bar{F}_{A'}$ и $(\bar{F}^*)_{B'}$ [3, (5.1.63)(eng)], где $\phi_{AB} = 0$, $\tilde{\phi}_{A'B'} = \bar{F}_{(A'}(\bar{F}^*)_{B')}$. Определим GEM_F*-состояние* как $\mathfrak{F}_{ij} := (\mathfrak{F}^{\mathbb{C}})_{ij} + (\bar{\mathfrak{F}}^{\mathbb{C}})_{ij}$, и тогда $F_{ij} := (F^{\mathbb{C}})_{ij} + (\bar{F}^{\mathbb{C}})_{ij}$ будет действительным максвелловским тензором [3, (5.1.63)(eng)] с $\phi_{AB} = F_{(A}(F^*)_{B)}, \tilde{\phi}_{A'B'} = \bar{\phi}_{A'B'} = \bar{F}_{(A'}(\bar{F}^*)_{B')}$

$$\mathfrak{F}_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}(\bar{F}^{A'}(\bar{F}^*)_{A'} + F^A(F^*)_A)}_{\pm(\phi_F)^2 := \frac{1}{4}\mathfrak{F}_i{}^i =: \frac{1}{4}\mathfrak{F}} g_{ij} + F_{ij}.$$

Тогда тензор

$$(T_{EM})_{ik} := -\frac{1}{4\pi}(\mathfrak{F}_{ij}\mathfrak{F}_k{}^j - \frac{1}{4}\mathfrak{F}_{mj}\mathfrak{F}^{mj}g_{ik}) = \frac{1}{4\pi}(\frac{1}{4}F_{mj}F^{mj}g_{ik} - F_{ij}F_k{}^j)$$

будет ТЭИ для электромагнитного поля. Из [3, (5.1.68)(eng)] следует $\frac{1}{2}(F^A(F^*)_A)^2 = P + iQ$, тогда $\phi_F = \pm\sqrt[4]{\sqrt{P^2+Q^2}+P}$. Предположим, что ϕ_F удовлетворяет конформному волновому уравнению $(\Box + 4\Lambda)\phi_F = 0$ согласно [3, (6.8.30)(eng)]. Поэтому из [3, (6.8.25)(eng)] в случае, когда $\phi_F = \Omega$, $\Lambda = -\frac{1}{4}\phi_F^{-1}\Box\phi_F$, следует, что

$$(T_G)_{ik} := \frac{1}{12}k(4\nabla_i\phi_F\nabla_k\phi_F - g_{ik}\nabla_j\phi_F\nabla^j\phi_F - 2\phi_F\nabla_i\nabla_k\phi_F + 4\Lambda(\phi_F)^2 g_{ik} - (\phi_F)^2 R_{ik})$$

есть ТЭИ [3, (6.8.36)(eng)] для волнового уравнения. Тогда условия сохранения GEM_F -состояния примут вид

$$\nabla_i\mathfrak{F}^{[ij]} = 4\pi J^j,\ \nabla_{[i}\mathfrak{F}_{jk]} = 0,\ \nabla_i\mathfrak{F}_{(jk)} = g_{jk}\nabla_i(\phi_F)^2,$$

которые можно усилить до состояния $\nabla_i\mathfrak{F}^{ij} = 0 \Leftrightarrow \nabla^j\mathfrak{F} = -16\pi J^j$. Условия же непрерывности дадут $\Box\mathfrak{F} = 0 \Leftrightarrow \Box(\phi_F)^2 = 0$, что вместе с волновым уравнением приведет к $\nabla_i\phi_F\nabla^i\phi_F - 4\Lambda(\phi_F)^2 = 0$, и ТЭИ примет вид

$$(T_G)_{ik} = \frac{1}{12}k(4\nabla_i\phi_F\nabla_k\phi_F - 2\phi_F\nabla_i\nabla_k\phi_F - (\phi_F)^2 R_{ik}).$$

Литература

1. Andreev K. V. *On the metric hypercomplex group alternative-elastic algebras for n mod 8 = 0* arXiv:1202.0941v1 [math-ph].

2. Andreev K. V. *On the spinor formalism for even n.* arXiv:1110.4737v3 [math-ph].

3. Penrose R., Rindler W. *Spinors and Space-Time. Vol. 1: Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields. Vol. 2: Spinor and Twistor Methods in Space-Time Geometry.* –Cambridge: Cambridge Monogr. Math. Phys. Cambridge University Press, 1984. –V. 1: 1986. –V. 2.

4. Постников М.М. *Лекции по геометрии Семестр V. Группы и алгебры Ли* –М. Наука, 1986. –447 с.

5. Andreev K. V. *On the classification of metric hypercomplex group alternative-elastic algebras for n=8* arXiv:1208.4466v1 [math-ph]

ON THE ALTERNATIVE-ELASTIC ALGEBRAS FOR N MOD 8 = 0

K.V. Andreev

This paper describes the connection between Clifford algebras, a spinor algebra and algebras of hypercomplex numbers, based on the Bott periodicity and the Cartan triplicity principle, and the influence of these aspects on the physical component of the world puzzle.

Keywords: spinor, Clifford algebra, hypercomplex numbers.